Dormant opers on elliptic curves

大阪大学大学院　情報科学研究科　情報基礎数学専攻
軽部尚香 (Naoka KARUBE) *

概要

oper とは然るべき代数曲線上の平坦接続つき主束であり，Langlands 対応における基本的対象として，$\mathbb{C}$ 上の設定の元で Beilinson-Drinfeld により導入された．本論文では正標数の oper の中で，p 曲率という不変量で特徴づけられるものを扱い，oper の底空間である代数曲線が楕円曲線の場合にそのモジュライ空間がどのような大域的構造を持つのかをより詳細かつ明示的に調べた．

1　背景

簡約代数群 G に対して定まる G-oper とは代数曲線上の然るべき接続付き主 G 束であり，G-oper およびそれらを分類するモジュライ空間は，その変種である (generic) Miura G-oper とともに幾何的 Langlands 対応や Teichmüller 理論などをはじめとする様々な取り組みにおいて基本的な対象となっている ([BeDr1],[BeDr2]).

たとえば X を代数閉体 k 上の代数曲線とするとき，X 上の GL_n-oper は次のようなデータによって与えられる：

$$\mathscr{F} := (\mathcal{F}, \nabla, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n)$$

ただし，$\mathcal{F}$ は X 上定義された階数 n のベクトル束，∇ は $\mathcal{F}$ 上の接続（つまり，Leibniz 則をみたす k 線形射 $\mathcal{F} \to \Omega_X \otimes \mathcal{F}$)，そして $\{\mathcal{F}^j\}_j$ は各部分商 $\mathcal{F}^j/\mathcal{F}^{j+1}$ が直線束となる降下フィルトレーションである．そしてこれらは次の 2 条件をみたす：

- $\nabla(\mathcal{F}^j) \subseteq \Omega_X \otimes \mathcal{F}^{j-1}$（$1 \leq i \leq n-1$）；
- ∇ から誘導される射 $\mathcal{F}^j/\mathcal{F}^{j+1} \to \Omega_X \otimes (\mathcal{F}^{j-1}/\mathcal{F}^j)$ は同型（$1 \leq i \leq n-1$).

このような対象は適切なゲージ変換により，可逆な主表象をもつ X 上の n 階単独型線形常微分作用素と同一視される．また，$k = \mathbb{C}$ のとき，X 上の PGL_2-oper は X に付随する Riemann 面上の射影構造と（Riemann-Hilbert 対応を介して）同値であり，generic Miura PGL_2-oper はアフィン構造と同値な概念である．

基礎体 k が正標数の場合における oper の体系的研究は p 進 Teichmüller 理論（p は素数）に端を発する [Moc]．p 進体上の双曲的代数曲線の一意化に関する当該理論では，p **曲率**と呼ばれる不変量

* E-mail:takadanaoka09@gmail.com

によって特徴付けられる PGL_2-oper のモジュライ空間を分析することが議論の根幹となっている．それに引き続き [Wak4] では，一般の G に対する標数 p の G-oper に関するモジュライ理論を展開している．ここで重要となる対象は，p 曲率が零となる G-oper，つまり dormant G-oper と呼ばれるものである．

Dormant G-oper を分類するモジュライ空間の幾何構造において注目すべき性質の一つは生成的エタール性である．この性質を用いてモジュライ空間の変形や退化を分析することができ，その結果として，たとえば Gromov-Witten 理論や affine Lie 環の共形場理論，そして多面体やグラフに関連する組み合わせ論などと正標数の oper の理論を関連づけることができる．

2 Nilpotent G-opers

主結果の証明の鍵となる nilpotent G-oper について説明する．

標数 p の k 上で定義された楕円曲線を分類するモジュライ空間を $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}$，その Deligne-Mumford コンパクト化を $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ で表す．G-oper, Miura G-oper の定義に関しては [Wak4, Definition 2.1], [Wak2, Definition 3.2.1] を参照しここでは省略する．また p 曲率が 0 となる G-oper を dormant G-oper と言う．

G は随伴型半単純代数群であると仮定し，$\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ が分類する代数曲線上の dormant G-oper のモジュライ空間を

$$\mathcal{O}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots} := \left\{(X, \mathscr{F}) \,\middle|\, X \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}},\ \mathscr{F} \text{ は } X \text{ 上の dormant } G\text{-oper}\right\}$$

とする．同様に dormant generic Miura G-oper に対するモジュライ空間を $\mathcal{MO}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots}$ とおくと，$(X, \mathscr{F}) \mapsto X$ によって定まる自然な射影

$$\Pi_G : \mathcal{O}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots} \to \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}, \qquad \widehat{\Pi}_G : \mathcal{MO}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots} \to \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$$

を得る．また G の Borel 部分群 B, 極大トーラス T をとる．G, B, T のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}$ と表す．これらは適切に $\mathbb{F}_p$ 上定義されているとする．さらに W を (G, T) の Weyl 群とし，$\mathfrak{c}$ で GIT 商 $\mathfrak{t}/\!\!/W$ を表すと，Chevalley の定理より $\mathfrak{c}$ は GIT 商 $\mathfrak{g}/\!\!/G$ と同型である．$\mathcal{N} := T^\vee\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}} \setminus \mathrm{Im}(0_{T^\vee\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}})$ と定める．さらに，$\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ 上の層 $\mathcal{B}$ (resp., $\mathcal{B}^\nabla$) を，$\mathscr{X} \in \mathrm{ob}(\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}})$ (ここで $\mathscr{X} := (X/S, \sigma)$ とする) を，射 $\varsigma : X \to (F_X^*(\Omega))^\times \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{c}$ (resp., $X \to \Omega^\times \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{c}$) の集合に送ることで定義する．ここで，任意の直線束 $\mathcal{L}$ に対して, $\mathcal{L}$ に対応する $\mathbb{G}_m$ 束を $\mathcal{L}^\times$ で表す．$\mathcal{B}$ や $\mathcal{B}^\nabla$ はどちらも $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ 上有限型のスキームで表現できる．また フロベニウス射 $F_{X/S}$ の引き戻しによって $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ 上の射 $F^{\nabla\Rightarrow\emptyset} : \mathcal{B}^\nabla \to \mathcal{B}$ が引き起こされ，これは閉埋め込みである．

$\mathscr{X} := (X/S, \sigma)$ ，$\mathscr{E}^\spadesuit := (\mathcal{E}_B, \nabla)$ とし，$(\mathscr{X}, \mathscr{E}^\spadesuit)$ を $\mathcal{O}p_G$ の対象とする．この時 $(\mathcal{E}_G, \psi(\nabla))$ は商スタック $[((F_X^*(\Omega))^\times \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{g})/G]$ の大域切断を定める．$\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$ から誘導される射

$$[((F_X^*(\Omega))^\times \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{g})/G] \to (F_X^*(\Omega))^\times \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{c} \tag{1}$$

と上の切断を合成すると，$(F_X^*(\Omega))^\times \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{c}$ の X-有理点 $\overline{\psi(\nabla)}$ を得る．これは同時に $\mathcal{B}$ の S-有理点である．この対応 $\mathscr{E}^\spadesuit \mapsto \overline{\psi(\nabla)}$ により $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ 上の射

$$\mathrm{HM} : \mathcal{O}p_G \to \mathcal{B}. \tag{2}$$

を得る．さらに HM は $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ 上の射

$$\mathrm{HM}^{\nabla} : \mathcal{O}p_G \to \mathcal{B}^{\nabla} \tag{3}$$

に制限でき，これを **Hitchin-Mochizuki 射**と呼ぶ.

次に, $(\mathscr{X}, \delta, \varsigma)$ を $\mathcal{N} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}} \mathcal{B}^{\nabla}$ の対象とする．invarient differential δ による Ω の自明化 $\Omega = \mathcal{O}_X$ により $\Omega^{\times} \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{c} = X \times_k \mathfrak{c}$ と同一視できる．これにより， ς は $\mathfrak{c}(X)\,(= \mathfrak{c}(S))$ の元 ς' と対応する．$(\mathscr{X}, \delta, \varsigma) \mapsto (\mathscr{X}, \delta, \varsigma')$ と対応させることで $\mathcal{N}$ 上の同型

$$\mathcal{N} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}} \mathcal{B}^{\nabla} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N} \times_k \mathfrak{c} \tag{4}$$

を得る．射影 $\mathcal{N} \to \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ で基底変換することで, $\mathcal{N}$ 上の $\mathcal{N} \times_k \mathfrak{c}$ の自己準同型

$$\xi : \mathcal{N} \times_k \mathfrak{c} \xrightarrow{\mathcal{N}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}} \mathcal{O}p_G \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{N}} \times \mathrm{HM}^{\nabla}} \mathcal{N} \times_k \mathcal{B}^{\nabla} \xrightarrow{\mathcal{N}} \times_k \mathfrak{c} \tag{5}$$

が得られる．この射は明らかに $(\mathscr{X}, \delta, \rho)$ (for $w \in \mathfrak{c}(S)$) を $(\mathscr{X}, \delta, \gamma_{H(\mathscr{X},\delta)}(\rho))$ に送っている．ここで $H^0(S, \mathcal{O}_S)$ の任意の a と $\mathfrak{c}(S)$ の任意の ρ に対し,

$$\gamma_a(\rho) := \chi((q_{-1} + \kappa^{-1}(\rho))^{[p]} - a \cdot (q_{-1} + \kappa^{-1}(\rho))). \tag{6}$$

と定めている（q_{-1} は $\mathfrak{g}_{-1}$ の元）

Proposition 2.1. 射 ξ は有限で忠実平坦であり，次数は $p^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}$ である．さらに， $\mathcal{N}^{\mathrm{ss}} := \mathcal{N} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}} \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{ell}}$ と表すと, $\mathcal{N}^{\mathrm{ss}}\,(\subseteq \mathcal{N})$ での制限射 $\xi^{\mathrm{ss}} : \mathcal{N}^{\mathrm{ss}} \times_k \mathfrak{c} \to \mathcal{N}^{\mathrm{ss}} \times_k \mathfrak{c}$ *of* ξ は $\mathrm{id}_{\mathcal{N}^{\mathrm{ss}}} \times F_{\mathfrak{c}/k}$ と一致する.

さらに， fpqc 射 $\mathcal{N} \to \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ で降下することにより以下の主張が導かれる.

Corollary 2.2. *Hitchin-Mochizuki* 射 HM^{∇} は有限で忠実平坦であり，次数は $p^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}$ である．さらに $\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{ell}}$ の任意の k-有理点 a 上の HM^{∇} のファイバーは，同一視 $\mathcal{O}p_G|_a = \mathcal{B}^{\nabla}|_a = \mathfrak{c}$ の元で, $F_{\mathfrak{c}/k}$ と一致する.

ゼロ切断 $X \to \Omega^{\times} \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{c}$ が定める大域切断 $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}} \to \mathcal{B}^{\nabla}$ を $0_{\mathcal{B}^{\nabla}}$ と表す．$0_{\mathcal{B}^{\nabla}}$ HM^{∇} による $0_{\mathcal{B}^{\nabla}}$ の逆像は $\mathcal{O}p_G$ の閉部分スタック

$$\mathcal{O}p_G^{p\text{-nilp}} := (\mathrm{HM}^{\nabla})^{-1}(0_{\mathcal{B}^{\nabla}}) \tag{7}$$

を定める．これは $\overline{\psi(\nabla)} = 0$ となる G-opers $\mathscr{E}^{\spadesuit} := (\mathcal{E}_B, \nabla)$ を分類するスタックであり，このような G-opers を **p-nilpotent** という.

Theorem 2.3. スタック $\mathcal{O}p_G^{p\text{-nilp}}$ は $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ 上有限で忠実平坦であり，次数は $p^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}$ である．さらに *Moreover, the fiber of* 射影 $\mathcal{O}p_G^{p\text{-nilp}} \to \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ の $\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{ell}}$ の任意の k-有理点 a 上のファイバーは $\mathrm{Spec}(k[\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}]/(\epsilon_1^p, \cdots, \epsilon_{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}^p))$ と同型である.

3 主定理

これらの対象に関する本講演の中心的な成果は以下のとおりである：

Theorem 3.1. *(i)* $\mathcal{O}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots}$ および $\mathcal{M}\mathcal{O}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots}$ は連結かつ k 上固有な *Deligne-Mumdord* スタックとして表現され，Π_G, $\widehat{\Pi}_G$ はともに有限な全射である．

(ii) 通常楕円曲線を分類する $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ の開部分空間を $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{ord}}$ とするとき，Π_G, $\widehat{\Pi}_G$ はともに $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{ord}}$ 上エタールであり，生成的次数は $\sharp(\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}(\mathbb{F}_p)/W)$，$\sharp(W)$ にそれぞれ一致する（ただし，$\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}$ は G の固定された極大トーラス T の *Lie* 環 $\mathfrak{t}$ に含まれる正則元全体の空間，そして W は (G,T) の *Weyl* 群とする）．そして自然な射影

$$\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{ord}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}} \mathcal{M}\mathcal{O}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots} \to \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{ord}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}} \mathcal{O}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots}$$

はエタール *Galois* 被覆であり，その *Galois* 群は W と同型である．

なお，[Wak4] では双曲的代数曲線上の dormant PGL_n-oper の個数を数える明示公式を証明しており，この公式を拡張することは「dormant oper の数え上げ幾何学」において中心的課題の一つといえる．上で述べた定理は，楕円曲線の場合に，PGL_n だけでなく一般の G に対してその課題に対する明示的な解答を与えた結果となっている．

参考文献

[BeDr1] A. A. Beilinson, V. Drinfeld, Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves, available at: `https://inspirehep.net/literature/`

[BeDr2] A. Beilinsion, V. Drinfeld, Opers, *arXiv: math. AG/0501398v1*, (2005).

[Moc] S. Mochizuki, *Foundations of p-adic Teichmüller theory*, American Mathematical Society, (1999).

[Wak4] Y. Wakabayashi, *A theory of dormant opers on pointed stable curves*, Astérisque **432**, Soc. Math. de France, (2022), ix+296 pp.

[Wak5] Y. Wakabayashi, Gaudin model modulo p, Tango structures, and dormant Miura opers, *J. Geom. Phys.* **200** (2024), Paper No. 105175, 18 pp.

[Wak2] Y. Wakabayashi, Moduli of Tango structures and dormant Miura opers, *Moscow Math. J.* **20** (2020), pp. 575-636.